Clase D: Coordenadas Esféricas

C.J. Vanegas

12 de junio de 2008

Para $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ introducimos 3 nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \sin\phi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\phi \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

recomendado para problemas con simetría esférica (simetría relativa a un punto).

O equivalentemente: $T : W^* \longrightarrow W$, $T(\rho, \theta, \phi) = (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$. Para que T sea inyectiva se toma: $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

- En esta coordenada: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \sim \rho^2 = R^2$ o $\rho = R$.

  Los planos de la forma: $Ax + By = 0 \sim \theta =$ constante ($\frac{y}{x} = -\frac{A}{B} \Rightarrow \tan\theta = -\frac{A}{B} \Rightarrow \theta = \arctan(-\frac{A}{B})$).

  Ecuaciones (conos) del tipo $z = \sqrt{x^2 + y^2} \sim \phi =$ cte, $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ ($\rho\cos\phi = \pm\rho\sin\phi$ ($0 \leq \phi \leq \pi \to \sin\phi \geq 0$) $\Rightarrow 1 = \pm\tan\phi \Rightarrow \phi = \arctan(\pm 1) = \frac{\pi}{4}$ ó $\frac{3\pi}{4}$).

  $z = 0 \sim \phi = \frac{\pi}{2}$ ($x = \rho\cos\theta = r$, $y = \rho\sin\theta = r$, $z = 0$).

- Jacobiano: $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = -\rho^2 \sin\phi$.

- Fórmula del cambio de variable.

$$\iiint\limits_{W} f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{W^*} f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

- Se recomienda este cambio:

1. Cuando en la región de integración aparezcan esferas o trozos de ellas que se describan fácilmente con esta coordenada.
2. Cuando en el integrando aparezcan expresiones del tipo $x^2 + y^2 + z^2$.

Ejemplo 1. *Calcular el volumen del sólido S:* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4, \ z + x^2 + y^2 \geq \frac{9}{4}\}$.

Solución 1.

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta\sin\phi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\phi \\ z &= \rho\cos\phi \end{cases}$$

Ejemplo 2. *Encuentre el volumen del sólido limitado por las gráficas de:* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 0$ *en el primer octante.*

Solución 2.

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta\sin\phi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\phi \\ z &= \rho\cos\phi \end{cases}$$

como estamos en el primer octante pedimos que: $0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}$, *ademas segun la informacion de las rectas dadas tenemos:* $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ *y finalmente como:* $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$